

# Control 1 MA22A Cálculo en varias variables

## Semestre Primavera 2006

Profesor: Alejandro Jofré.

Auxiliares: Sebastián Court, Julio Deride.

### Pregunta 1.-

- (a) Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  cerrados. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua.
- (i) Demuestre que  $A \cap B$  es un conjunto cerrado.
  - (ii) Demuestre que la preimagen por una función continua de un conjunto cerrado es un conjunto cerrado. Concluya que  $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \geq 0\}$  es cerrado.
  - (iii) Usando las partes anteriores, concluya que  $\{x \in \mathbb{R}^n | x \in A, f(x) \geq 0\}$  es cerrado.
- (b) Sea  $p, V, T$  variables reales positivas, conectadas por la relación  $pV = kT$ , con  $k$  una constante positiva. Entonces cada variable  $p, V, T$  es una función (definida implícitamente) por las otras dos variables.
- (i) Demuestre que

$$\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1$$

- (ii) Muestre que esta ecuación es válida si sólo asumimos la relación  $F(p, V, T) = 0$ , para todo  $p, V, T$  en el dominio de  $F$ , para alguna función  $F$  de clase  $C^1$ , con  $\frac{\partial F}{\partial x_j}(p, V, T) \neq 0$  para todo  $p, V, T$ , y  $j = 1, 2, 3$ .

### Pregunta 2.-

- (a) Considere el conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  dado por  $A = \{(x, y) : 0 < y < x \wedge x > 0\}$ . Determine para que valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)y}{x^\alpha} & \text{si } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in A^c \end{cases}$$

es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

- (b) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (i) Estudie la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$ .
- (ii) Encuentre las derivadas parciales de  $f$  y estudie su continuidad en  $\mathbb{R}^2$ .
- (iii) Estudie la diferenciabilidad de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Pregunta 3.-**

(a) Definimos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y)^2 y^2}{x^{7 + \frac{1}{2}}} & \text{si } 0 < x, 0 < y < x^2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$ . ¿Es  $g \circ \gamma(t)$  diferenciable en  $t = 0$ ? A partir de la regla de la cadena, ¿Qué puede concluir sobre la diferenciabilidad de  $g$  en  $(0, 0)$ ?

(b) Definimos

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2), \quad x > 0, \\ v &= \arctan(y/x), \quad x > 0 \end{aligned}$$

Sea  $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  donde  $f = f(u, v)$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Pruebe que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \right]$$

3 horas.